ทฤษฎีบทลู่เข้าแบบเข้มสำหรับการส่งแบบหดเทียมโดยแท้
Strong Convergence Theorem for Strictly Pseudo-Contractive Mappings

ศราวุธ สุวรรณอัตถ์
Sarawut Suwannaut
สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยราชภัฏลำปาง

บทคัดย่อ

บทความวิจัยนี้ได้นำเสนอและพิสูจน์ทฤษฎีบทการลู่เข้าแบบเข้มสำหรับการหาสมาชิกร่วมของจุดตรึงของวงศ์จำกัดของการส่งแบบหดเทียมโดยแท้ในปริภูมิฮิลเบิร์ต นอกจากนี้ทำการยกตัวอย่างเชิงตัวเลขสำหรับทฤษฎีบทหลักเพื่อยืนยันผลที่ได้จากทฤษฎี

คำสำคัญ: จุดตรึง ทฤษฎีบทลู่เข้าแบบเข้ม การส่งแบบหดเทียมโดยแท้

Abstract

In this article, strong convergence theorem for finding the common solution of fixed point of finite family of strictly pseudo-contractive mappings in Hilbert spaces is introduced and proved. Moreover, the numerical examples for main theorems are given to support the results.

Keywords: fixed point, strong convergence theorem, strictly pseudo-contractive mapping

บทนำ

เนื่องจากปัญหาที่เกิดขึ้นในวิทยาศาสตร์ วิศวกรรมศาสตร์ และเศรษฐศาสตร์ที่สามารถแปลงให้อยู่ในรูปของแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ซึ่งจะอยู่ในรูปสมการและอสมการทางคณิตศาสตร์ นอกจากนี้เรายังสามารถแปลงปัญหาที่สำคัญปัญหาหนึ่งในคอมพิวเตอร์ นั่นคือปัญหาที่เกี่ยวกับโครงข่ายประสาทเทียม (Artificial Neural Networks) มาแปลงอยู่ในรูปแบบจำลองทางคณิตศาสตร์โครงข่ายประสาทเทียมเป็นตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ (Mathematical model) หรือตัวแบบการคำนวณ (Computational model) ที่จำลองการทำงานของโครงข่ายประสาทในสมองมนุษย์เพื่อวัตถุประสงค์ในการสร้างเครื่องมือที่สามารถทำงานได้เหมือนกับการทำงานของสมองมนุษย์ เช่นการเรียนรู้การจดจำการพยากรณ์และการตัดสินใจเป็นต้นในปัจจุบันมีการประยุกต์ใช้โครงข่ายประสาทเทียมในงานหลายประเภท ได้แก่ การพยากรณ์อากาศ การพยากรณ์ปริมาณน้ำฝน การพยากรณ์หุ้น การพยากรณ์ค่าเงิน การทำนายพลังงานความร้อนที่สะสมอยู่ในตัวอาคาร การประมาณค่าฟังก์ชัน การทำเหมืองข้อมูล การจดจำรูปแบบที่มีความไม่แน่นอน เช่น ลายมือ ลายเซ็น ตัวอักษร รูปหน้า เป็นต้นนอกจากนี้ยังมีการประยุกต์ใช้ในอุตสาหกรรมการผลิตเกมส์คอมพิวเตอร์และอุตสาหกรรมอื่น ๆ อีกมากมายงานวิจัยทางด้านโครงข่ายประสาทเทียมในปัจจุบันจะเกี่ยวข้องกับการสร้างโครงข่ายประสาทเทียมแบบใหม่ ๆ การปรับปรุงประสิทธิภาพของโครงข่ายประสาทเทียมที่มีอยู่แล้วให้ดีขึ้นรวมถึงการพัฒนาอัลกอริทึมการเรียนรู้แบบใหม่ ๆ สำหรับโครงข่ายประสาทเทียมแบบต่าง ๆ ให้มีประสิทธิภาพสูงขึ้น โดยอัลกอริทึมการเรียนรู้ที่ถูกพัฒนาขึ้นมาก็จะมีข้อดีข้อเสียแตกต่างกันไปขึ้นอยู่กับทฤษฎีทางคณิตศาสตร์ที่ใช้ในการพัฒนาขั้นตอนการเรียนรู้สำหรับโครงข่ายประสาทเทียม

เราสามารถแปลงปัญหาเหล่านั้นให้อยู่ในรูปปัญหาของจุดตรึงและสามารถแก้ไขปัญหาต่าง ๆ ได้ง่ายขึ้นโดยใช้ทฤษฎีจุดตรึง (Fixed point theory) โดยเฉพาะการหาสมาชิกร่วมของเซตของปัญหาจุดตรึงสำหรับการส่งแบบไม่ขยายเซตของคำตอบของปัญหาดุลยภาพทั่วไปและเซตของอสมการการแปรผันในปริภูมิฮิลเบิร์ต

กำหนดให้ H เป็นปริภูมิฮิลเบิร์ต และ $C \subseteq H$ เป็นเซตย่อยนูนปิด โดยเราจะเรียก $x \in C$ ว่าเป็นจุดตรึง (*fixed point*) ของการส่ง T ถ้า $T(x) = x$ และเซตของจุดตรึงทั้งหมดของ T คือ $Fix(T) = \{x \in C : Tx = x\}$

ในปัจจุบันทฤษฎีจุดตรึง นับว่ามีบทบาทสำคัญอย่างมากต่อการพัฒนาทางด้านวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยีสมัยใหม่ และสามารถนำไปประยุกต์เพื่อแก้ปัญหาต่างๆ ได้เช่น ในทางเศรษฐศาสตร์ก็นำทฤษฎีจุดตรึงไปใช้ในการหาจุดที่ทำกำไรสูงสุด หรือเพื่อหาจุดคุ้มทุน ในทางคอมพิวเตอร์สามารถนำไปใช้แก้ไขปัญหาโครงข่ายประสาทเทียม (Artificial neural networks) ต่อไปเป็นการแนะนำบทนิยามของการส่งแบบไม่ขยายและการส่งแบบหดเทียมโดยแท้

นิยาม 1.1

กำหนดให้ H เป็นปริภูมิฮิลเบิร์ต และ $C \subseteq H$ เป็นเซตย่อยนูนปิด เราจะเรียกการส่ง $T: C \to C$ ว่าเป็น

1. การส่งแบบไม่ขยาย (*nonexpansive mapping*) ถ้า $\|Tx - Ty\| \le \|x - y\|$ สำหรับทุกๆ $x, y \in C$
2. การส่งแบบหดเทียมโดยแท้ (*strictly pseudo-contractive mapping*) ถ้ามี $\kappa \in [0,1)$ ที่ทำให้ $\|Tx - Ty\|^2 \le \|x - y\|^2 + \kappa \|(I - T)x - (I - T)y\|^2$ สำหรับทุกๆ $x, y \in C$

ข้อสังเกต 1.2

สังเกตได้ว่าถ้า T เป็นการส่งแบบหดเทียมโดยแท้และ $\kappa = 0$ แล้ว T เป็นการส่งแบบไม่ขยาย โดย Yao et al. (2009) ได้พิสูจน์ทฤษฎีต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 1.3

กำหนดให้ C เป็นเซตย่อยนูนปิดและเป็นเซตคอนเวกซ์ที่ไม่เป็นเซตว่างในปริภูมิฮิลเบิร์ต H ให้ $T: C \to C$ เป็นการส่งแบบไม่ขยายโดยที่ $Fix(T) \neq \varnothing$ ให้ $\{\alpha_n\}$ และ $\{\beta_n\}$ เป็นลำดับใน (0,1) สำหรับ $x_1 \in C$ ใดๆ ให้ลำดับ $\{x_n\}, n \ge 1$ ถูกกำหนดโดย

$$y_n = P_C\left[(1-\alpha_n)x_n\right],$$
$$x_{n+1} = (1-\beta_n)x_n + \beta_n T y_n$$

กำหนดให้เงื่อนไขต่อไปนี้เป็นจริง

1. $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0$ และ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \infty$
2. $0 < \liminf\limits_{n\to\infty} \beta_n \le \limsup\limits_{n\to\infty} \beta_n < 1$

ดังนั้นลำดับ $\{x_n\}$ ที่ถูกสร้างโดยกระบวนการทำซ้ำดังกล่าว จะลู่เข้าแบบเข้มไปยังจุดตรึงของ T

จุดประสงค์ของบทความวิจัยนี้คือ เพื่อใช้กระบวนการทำซ้ำตามที่นิยามไว้ในทฤษฎีบท 1.3 จากนั้นสร้างทฤษฎีบทการลู่เข้าแบบเข้ม โดยลำดับที่ถูกสร้างขึ้นโดยกระบวนการทำซ้ำดังกล่าว จะลู่เข้าแบบเข้มไปยังสมาชิกร่วมของจุดตรึงของวงศ์จำกัดของการส่งหดเทียมโดยแท้

2. ความรู้พื้นฐาน

กำหนดให้ H เป็นปริภูมิฮิลเบิร์ต และ C เป็นเซตย่อยนูนปิดและเซตคอนเวกซ์ที่ไม่เป็นเซตว่างของ H โดยจะแทนการลู่เข้าแบบเข้มด้วยสัญลักษณ์ $\rightarrow$ และแทนการลู่เข้าแบบอ่อนด้วยสัญลักษณ์ $\Rightarrow$

สำหรับทุกๆจุด $x \in C$ จะมีจุดที่ใกล้ที่สุด (*nearest point*) เพียงจุดเดียวใน C นิยามโดย $P_C x$ ที่ทำให้ $\|P_C x - x\| \le \|x - y\|$ สำหรับทุกๆ $y \in C$ จะเรียก P_C ว่าเมตริกโปรเจกชัน (metric projection) ของ H ทั่วถึง C

บทตั้ง 2.1 (Opial et al., 2000)
สำหรับทุกๆ $z \in H$ และ $u \in C$ จะได้

$$u = P_C z \Leftrightarrow \langle u - z, v - u \rangle \ge 0, \ \forall v \in C$$

นอกจากนั้น P_C เป็นการส่งแบบ firmly nonexpansive ของ H ทั่วถึง C และสอดคล้องกับเงื่อนไขต่อไปนี้

$$\|P_C x - P_C y\|^2 \le \langle P_C x - P_C y, x - y \rangle \ge 0, \ \forall x, y \in H$$

บทตั้ง 2.2 (Zdzislaw, 1967)

สำหรับแต่ละปริภูมิฮิลเบิร์ตจะสอดคล้องกับเงื่อนไขของโอเปียล (Opial's condition) นั่นคือ สำหรับทุกๆลำดับ $\{x_n\} \subset H$ โดยที่ $x_n \Rightarrow x$ จะได้อสมการต่อไปนี้เป็นจริง

$$\liminf_{n\to\infty} \|x_n - x\| < \liminf_{n\to\infty} \|x_n - y\|$$

สำหรับทุกๆ $y \in H$ โดยที่ $y \ne x$

บทตั้ง 2.3 (Xu, 2003)
กำหนดให้ $\{s_n\}$ เป็นลำดับของจำนวนจริงที่ไม่เป็นลบ ที่สอดคล้องกับเงื่อนไขต่อไปนี้

$$s_{n+1} \le (1 - \alpha_n) s_n + \delta_n, \ \forall n \ge 0$$

โดยที่ α_n เป็นลำดับในช่วงเปิด (0,1) และ $\{\delta_n\}$ เป็นลำดับที่สอดคล้องกับเงื่อนไขต่อไปนี้

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n=\infty$

(2) $\limsup_{n\to\infty}\frac{\delta_n}{\alpha_n}\le 0$ หรือ $\sum_{n=1}^{\infty}|\delta_n|<\infty$

ดังนั้น $\lim_{n\to\infty}s_n=0$

Kangtunyakarn and Suantai (2009) ได้นิยามการส่งแบบ K ไว้ดังบทนิยามต่อไปนี้

บทนิยาม 2.4

กำหนดให้ C เป็นเซตย่อยนูนปิดและเป็นเซตคอนเวกซ์ที่ไม่เป็นเซตว่างในปริภูมิฮิลเบิร์ต H ให้ $\{T_i\}_{i=1}^{N}$ เป็นวงศ์จำกัดของการส่งจาก C ไปยัง C และให้ $\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_N$ เป็นจำนวนจริงโดยที่ $0\le\lambda_i\le 1$ สำหรับทุกๆ $i=1,2,\dots,N$ นิยามการส่ง $K:C\to C$ ดังนี้

$$\begin{aligned}
U_1 &= \lambda_1T_1+(1-\lambda_1)I,\\
U_2 &= \lambda_2T_2U_1+(1-\lambda_2)U_1,\\
U_3 &= \lambda_3T_3U_2+(1-\lambda_3)U_2,\\
&\vdots\\
U_{N-1} &= \lambda_{N-1}T_{N-1}U_{N-2}+(1-\lambda_{N-1})U_{N-2},\\
K=U_N &= \lambda_NT_NU_{N-1}+(1-\lambda_N)U_{N-1}
\end{aligned}$$

โดยจะเรียกว่าเป็นการส่งแบบ K ที่สร้างจาก $T_1,T_2,\dots,T_N$ และ $\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_N$

Suwannaut and Kangtunyakarn (2014) ได้นำเสนอการส่งแบบ K ที่สร้างจากการส่งแบบหดเทียมโดยแท้ โดยได้ผลลัพธ์ ดังนี้

บทตั้ง 2.5

กำหนดให้ C เป็นเซตย่อยนูนปิดและเป็นเซตคอนเวกซ์ที่ไม่เป็นเซตว่างในปริภูมิฮิลเบิร์ต H ให้ $\{T_i\}_{i=1}^{N}$ เป็นวงศ์จำกัดของการส่งแบบหดเทียมโดยแท้จาก C ไปยัง C โดยที่ $\kappa_i\le\gamma_1$ สำหรับทุกๆ $i=1,2,\dots,N$ และ $\bigcap_{i=1}^{N}Fix(T_i)\ne\varnothing$ กำหนดให้ $\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_N$ เป็นจำนวนจริงโดยที่ $0<\lambda_i\le\gamma_2$ สำหรับทุกๆ $i=1,2,\dots,N$ และ $\gamma_1+\gamma_2<1$ ให้ K เป็นการส่งแบบ K ที่สร้างจาก $T_1,T_2,\dots,T_N$ และ $\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_N$ จะได้ว่าคุณสมบัติต่อไปนี้เป็นจริง

1. $Fix(K)=\bigcap_{i=1}^{N} Fix(T_i)$
2. K เป็นการส่งแบบไม่ขยาย

3. ทฤษฎีบทหลัก

ในหัวข้อต่อไปนี้จะใช้ความรู้เบื้องต้นที่กล่าวมาข้างต้น มาสร้างและพิสูจน์ทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 3.1

กำหนดให้ C เป็นเซตย่อยนูนปิด และเป็นเซตคอนเวกซ์ที่ไม่เป็นเซตว่างในปริภูมิฮิลเบิร์ต H ให้ $\{T_i\}_{i=1}^{N}$ เป็นวงศ์จำกัดของการส่งแบบหดเทียมโดยแท้จาก C ไปยัง C โดยที่ $\kappa_i \le \gamma_1$ สำหรับทุกๆ $i=1,2,\ldots,N$ และ $\bigcap_{i=1}^{N} Fix(T_i) \ne \varnothing$ กำหนดให้ $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_N$ เป็นจำนวนจริงโดยที่ $0<\lambda_i \le \gamma_2$ สำหรับทุกๆ $i=1,2,\ldots,N$ และ $\gamma_1+\gamma_2<1$ ให้ K เป็นการส่งแบบ K ที่สร้างจาก $T_1,T_2,\ldots,T_N$ และ $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_N$ ให้ $\{\alpha_n\}$ และ $\{\beta_n\}$ เป็นลำดับใน (0,1) สำหรับ $x_1 \in C$ ใดๆ ให้ลำดับ $\{x_n\}, n\ge 1$ ถูกสร้างโดย

$$\begin{aligned} y_n &= P_C\left[(1-\alpha_n)x_n\right], \\ x_{n+1} &= (1-\beta_n)x_n+\beta_n K y_n \end{aligned} \tag{1}$$

กำหนดให้เงื่อนไขต่อไปนี้เป็นจริง

1. $\lim_{n\to\infty}\alpha_n=0$ และ $\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n=\infty$
2. $0<\liminf_{n\to\infty}\beta_n \le \limsup_{n\to\infty}\beta_n<1$

ดังนั้นลำดับ $\{x_n\}$ ที่ถูกสร้างโดย (1) จะลู่เข้าแบบเข้มไปยัง $\bigcap_{i=1}^{N} Fix(T_i)$

การพิสูจน์ จากบทตั้ง 2.5 จะได้ว่า $Fix(K)=\bigcap_{i=1}^{N} Fix(T_i)$ และ K เป็นการส่งแบบไม่ขยาย จากทฤษฎีบท 1.3 สรุปได้ว่า ลำดับ $\{x_n\}$ ลู่เข้าแบบเข้มไปยัง $\bigcap_{i=1}^{N} Fix(T_i)$

ในลำดับต่อไปคือการยกตัวอย่างเชิงตัวเลขสำหรับทฤษฎีบท 3.1 เพื่อยืนยันผลที่ได้จากทฤษฎี

ตัวอย่าง 3.2 กำหนดให้ $C=[0,1]$ และ $\mathbf{R}$ เป็นเซตของจำนวนจริง และให้การส่ง $T:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ นิยามโดย

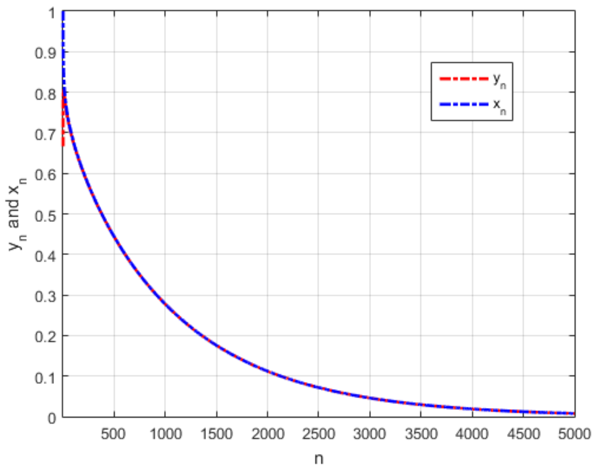
$$T_i x=\frac{7i}{7i+1}x,\ \forall x\in C \text{ และ } \lambda_i=\frac{1}{N+i},\ \forall i=1,2,\ldots,N$$

กำหนดให้ลำดับ $\alpha_n=\frac{1}{3n},\beta_n=\frac{n+1}{7n+2},\ \forall n\in\mathbb{N}$ จะเห็นได้ว่าการส่ง T_i เป็นการส่งแบบหดเทียมโดยแท้สำหรับทุกๆ $i=1,2,\ldots,N$ โดยที่ $Fix(K)=\bigcap_{i=1}^{N}Fix(T_i)=\{0\}$ และลำดับ α_n และ β_n สอดคล้องกับเงื่อนไขของทฤษฎีบท 3.1

ตารางที่ 1 และภาพที่ 1 แสดงค่าของลำดับ x_n โดยที่ $x_1=0.1$ และ $N=100,$ $n=5000$

ตารางที่ 1 ค่าของลำดับ x_n โดยที่ $x_1=0.1$ และ $N=100,\quad n=5000$

n	$y(n)$	$x(n)$
1	0.066667	0.1
500	0.044372	0.044401
1000	0.027738	0.027747
2000	0.011202	0.011204
3000	0.004586	0.004587
4000	0.001888	0.001888
5000	0.000780	0.000780



ภาพที่ 1 การลู่เข้าของลำดับ x_n โดยที่ $x_1 = 0.1$ และ $N = 100,\ \ n = 5000$

ถัดมาเราจะทำการปรับปรุงกระบวนการทำซ้ำ (1) และปรับเปลี่ยนเงื่อนไขบางประการของลำดับ $\{\alpha_n\}$ และ $\{\beta_n\}$ จากนั้นทำการพิสูจน์ทฤษฎีบทการลู่เข้าแบบเข้มของลำดับ $\{x_n\}$ ดังทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 3.3

กำหนดให้ C เป็นเซตย่อยนูนปิด และเป็นเซตคอนเวกซ์ที่ไม่เป็นเซตว่างในปริภูมิฮิลเบิร์ต H ให้ $\{T_i\}_{i=1}^{N}$ เป็นวงศ์จำกัดของการส่งแบบหดเทียมโดยแท้จาก C ไปยัง C โดยที่ $\kappa_i \le \gamma_1$ สำหรับทุกๆ $i = 1, 2, \ldots, N$ และ $\Omega := \bigcap_{i=1}^{N} Fix(T_i) \ne \varnothing$ กำหนดให้ $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_N$ เป็นจำนวนจริงโดยที่ $0 < \lambda_i \le \gamma_2$ สำหรับทุกๆ $i = 1, 2, \ldots, N$ และ $\gamma_1 + \gamma_2 < 1$ ให้ K เป็นการส่งแบบ K ที่สร้างจาก $T_1, T_2, \ldots, T_N$ และ $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_N$ ให้ $\{\alpha_n\}$ และ $\{\beta_n\}$ เป็นลำดับใน (0,1) สำหรับ $x_1 \in C,\ u \in C$ ใดๆ ให้ลำดับ $\{x_n\}, n \ge 1$ ถูกสร้างโดย

$$\begin{aligned} y_n &= \alpha_n u + (1-\alpha_n) x_n, \\ x_{n+1} &= (1-\beta_n) x_n + \beta_n K y_n \end{aligned} \tag{2}$$

กำหนดให้เงื่อนไขต่อไปนี้เป็นจริง

1. $\lim_{n\to\infty}\alpha_n = 0$ และ $\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n = \infty$
2. $0 < a \le \beta_n \le b < 1$ สำหรับบาง $a,b > 0$
3. $\sum_{n=1}^{\infty}|\alpha_{n+1}-\alpha_n| < \infty,\ \sum_{n=1}^{\infty}|\beta_{n+1}-\beta_n| < \infty$

ดังนั้นลำดับ $\{x_n\}$ ที่ถูกสร้างโดย (2) จะลู่เข้าแบบเข้มไปยัง $\tilde{x} = P_\Omega u$ นอกจากนี้ ลำดับ $\{y_n\}$ ที่ถูกสร้างโดย (2) จะลู่เข้าแบบเข้มไปยัง $\tilde{x} = P_\Omega u$ เช่นเดียวกัน

การพิสูจน์ กำหนดให้ $x^* \in \Omega$ เนื่องจาก $Fix(K) = \bigcap_{i=1}^{N} Fix(T_i)$ จะได้ว่า $x^* \in Fix(K)$ นั่นคือ $x^* = Kx^*$

ขั้นที่ 1 แสดงว่าลำดับ $\{x_n\}$ เป็นลำดับที่มีขอบเขต

จากสมการ (2) จะได้

$$\begin{aligned}\|x_{n+1}-x^*\| &\le (1-\beta_n)\|x_n - x^*\| + \beta_n\|Ky_n - x^*\| \\ &\le (1-\beta_n)\|x_n - x^*\| + \beta_n\|y_n - x^*\| \\ &\le (1-\beta_n)\|x_n - x^*\| + \beta_n\left[\alpha_n\|u - x^*\| + (1-\alpha_n)\|x_n - x^*\|\right] \\ &\le \max_{n\in\mathbb{N}}\left\{\|u-x^*\|, \|x_1 - x^*\|\right\}\end{aligned}$$

โดยใช้วิธีอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ จะได้ว่า $\|x_n - x^*\| \le M, \forall n \in \mathbb{N}$ สำหรับบาง $M > 0$ ดังนั้น $\{x_n\}$ เป็นลำดับที่มีขอบเขต นอกจากนี้ $\{y_n\}$ เป็นลำดับที่มีขอบเขตเช่นเดียวกันกับ $\{x_n\}$

ขั้นที่ 2 พิสูจน์ว่า $\|x_{n+1}-x_n\|\to 0$ โดยที่ $n\to\infty$

$$
\begin{aligned}
&\|x_{n+1}-x_n\| \\
&=\left\|(1-\beta_n)x_n+\beta_n Ky_n-\left((1-\beta_{n-1})x_{n-1}+\beta_{n-1}Ky_{n-1}\right)\right\| \\
&\le (1-\beta_n)\|x_n-x_{n-1}\|+|\beta_n-\beta_{n-1}|\|x_{n-1}\|+\beta_n\|Ky_n-Ky_{n-1}\|+|\beta_n-\beta_{n-1}|\|Ky_{n-1}\| \\
&\le (1-\beta_n)\|x_n-x_{n-1}\|+|\beta_n-\beta_{n-1}|\left(\|x_{n-1}\|+\|Ky_{n-1}\|\right)+\beta_n\|y_n-y_{n-1}\| \\
&\le (1-\beta_n)\|x_n-x_{n-1}\|+|\beta_n-\beta_{n-1}|\left(\|x_{n-1}\|+\|Ky_{n-1}\|\right) \\
&\quad +\beta_n\left[(1-\alpha_n)\|x_n-x_{n-1}\|+|\alpha_n-\alpha_{n-1}|\left(\|u\|+\|x_{n-1}\|\right)\right] \\
&\le (1-\alpha_n\beta_n)\|x_n-x_{n-1}\|+|\beta_n-\beta_{n-1}|\left(\|x_{n-1}\|+\|Ky_{n-1}\|\right)+|\alpha_n-\alpha_{n-1}|\left(\|u\|+\|x_{n-1}\|\right) \\
&\le (1-\alpha_n\beta_n)\|x_n-x_{n-1}\|+2|\beta_n-\beta_{n-1}|K+2|\alpha_n-\alpha_{n-1}|K
\end{aligned}
$$

โดยที่ $K=\max_{n\in\mathbb{N}}\{\|u\|,\|x_n\|,\|Ky_n\|\}$

จากบทตั้ง 2.3 และเงื่อนไข 1 และ 3 จะได้ว่า

$$\lim_{n\to\infty}\|x_{n+1}-x_n\|=0 \tag{3}$$

ขั้นที่ 3 พิสูจน์ว่า $\|y_n-x_n\|\to 0$ โดยที่ $n\to\infty$ และ $\|Ky_n-y_n\|\to 0$ โดยที่ $n\to\infty$

จากสมการ (2) จะได้

$$\|y_n-x_n\|\le\alpha_n\|u-x_n\|$$

จากเงื่อนไข 1 จะได้ว่า

$$\lim_{n\to\infty}\|y_n-x_n\|=0 \tag{4}$$

จากสมการ (2) จะได้

$$x_{n+1}-x_n=\beta_n\left(Ky_n-x_n\right)$$

จากสมการ (3) และเงื่อนไข 2 จะได้

$$\lim_{n\to\infty}\|Ky_n-x_n\|=0 \tag{5}$$

เนื่องจาก

$$\|Ky_n-y_n\|\le\|Ky_n-x_n\|+\|x_n-y_n\|$$

จากสมการ (4) และ (5) ดังนั้น

$$\lim_{n\to\infty}\|Ky_n-y_n\|=0 \tag{6}$$

ขั้นที่ 4 พิสูจน์ว่า $\limsup_{n\to\infty}\langle u-\tilde{x}, y_n-\tilde{x}\rangle \le 0$ โดยที่ $\tilde{x}=P_\Omega u$
เลือกลำดับย่อย $\{y_{n_k}\}$ ของลำดับ $\{y_n\}$ ที่ทำให้

$$\limsup_{n\to\infty}\langle u-\tilde{x}, y_n-\tilde{x}\rangle = \lim_{k\to\infty}\langle u-\tilde{x}, y_{n_k}-\tilde{x}\rangle \tag{7}$$

โดยไม่เสียนัยยะ เราสมมติให้ $x_{n_k} \Rightarrow \omega$ โดยที่ $k\to\infty$ จากสมการ (4) จะได้ว่า $y_{n_k} \Rightarrow \omega$ โดยที่ $k\to\infty$

จากบทตั้ง 2.4 จะได้ว่า $Fix(K)=\bigcap_{i=1}^{N} Fix(T_i)$ สมมติให้ $\omega \ne K\omega$ โดยใช้บทตั้ง 2.2 จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
\liminf_{k\to\infty}\|y_{n_k}-\omega\| &< \liminf_{k\to\infty}\|y_{n_k}-K\omega\| \\
&\le \liminf_{k\to\infty}\|y_{n_k}-Ky_{n_k}\| + \liminf_{k\to\infty}\|Ky_{n_k}-K\omega\| \\
&\le \liminf_{k\to\infty}\|y_{n_k}-\omega\|
\end{aligned}$$

เกิดข้อขัดแย้ง ดังนั้น $\omega \in Fix(K)=\bigcap_{i=1}^{N} Fix(T_i)$

โดยใช้บทตั้ง 2.1 จะได้

$$\limsup_{n\to\infty}\langle u-\tilde{x}, y_n-\tilde{x}\rangle = \lim_{k\to\infty}\langle u-\tilde{x}, y_{n_k}-\tilde{x}\rangle = \langle u-\tilde{x}, \omega-\tilde{x}\rangle \le 0 \tag{8}$$

ขั้นที่ 5 พิสูจน์ว่าลำดับ $\{x_n\}$ ลู่เข้าแบบเข้มไปยัง $\tilde{x}=P_\Omega u$ นอกจากนี้ลำดับ $\{y_n\}$ จะลู่เข้าแบบเข้มไปยัง $\tilde{x}=P_\Omega u$ เช่นเดียวกัน
พิจารณา

$$\begin{aligned}
\|x_{n+1}-\tilde{x}\|^2 &= \|(1-\beta_n)(x_n-\tilde{x})+\beta_n(Ky_n-\tilde{x})\|^2 \\
&\le (1-\beta_n)\|x_n-\tilde{x}\|^2+\beta_n\|(Ky_n-\tilde{x})\|^2 \\
&\le (1-\beta_n)\|x_n-\tilde{x}\|^2+\beta_n\|(y_n-\tilde{x})\|^2 \\
&= (1-\beta_n)\|x_n-\tilde{x}\|^2+\beta_n\|\alpha_n(u-\tilde{x})+(1-\alpha_n)(x_n-\tilde{x})\|^2 \\
&\le (1-\beta_n)\|x_n-\tilde{x}\|^2+\beta_n\left[\|(1-\alpha_n)(x_n-\tilde{x})\|^2+2\alpha_n\langle u-\tilde{x}, y_n-\tilde{x}\rangle\right] \\
&= (1-\beta_n)\|x_n-\tilde{x}\|^2+\beta_n(1-\alpha_n)^2\|x_n-\tilde{x}\|^2+2\alpha_n\beta_n\langle u-\tilde{x}, y_n-\tilde{x}\rangle \\
&\le (1-\beta_n)\|x_n-\tilde{x}\|^2+\beta_n(1-\alpha_n)\|x_n-\tilde{x}\|^2+2\alpha_n\beta_n\langle u-\tilde{x}, y_n-\tilde{x}\rangle \\
&= (1-\alpha_n\beta_n)\|x_n-\tilde{x}\|^2+2\alpha_n\beta_n\langle u-\tilde{x}, y_n-\tilde{x}\rangle
\end{aligned}$$

จากสมการ (8), เงื่อนไข 1 และ 2 และบทตั้ง 2.3 เราสามารถสรุปได้ว่าลำดับ $\{x_n\}$ ลู่เข้าแบบเข้มไปยัง $\tilde{x} = P_\Omega u$ นอกจากนี้ จากสมการ (4) จะได้ว่าลำดับ $\{y_n\}$ จะลู่เข้าแบบเข้มไปยัง $\tilde{x} = P_\Omega u$ เช่นเดียวกัน

ถัดมาจะทำการยกตัวอย่างเชิงตัวเลขสำหรับทฤษฎีบท 3.3 เพื่อยืนยันผลที่ได้จากทฤษฎี

ตัวอย่าง 3.4 กำหนดให้ $C = \mathbf{R}$ โดยที่ $\mathbf{R}$ เป็นเซตของจำนวนจริง และให้การส่ง $T : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ นิยามโดย

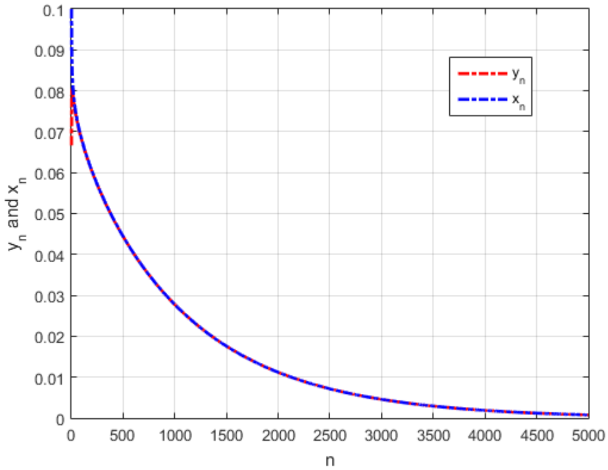
$$T_i x = \frac{7i}{7i+1} x, \ \forall x \in C \text{ และ } \lambda_i = \frac{1}{N+i}, \ \forall i = 1, 2, \ldots, N$$

กำหนดให้ลำดับ $u = 1, \alpha_n = \dfrac{1}{3n}, \beta_n = \dfrac{n+1}{7n+2}, \ \forall n \in \mathbb{N}$ จะเห็นได้ว่าการส่ง T_i เป็นการส่งแบบหดเทียมโดยแท้สำหรับทุกๆ $i = 1, 2, \ldots, N$ โดยที่ $Fix(K) = \bigcap_{i=1}^{N} Fix(T_i) = \{0\}$ และลำดับ α_n และ β_n สอดคล้องกับเงื่อนไขของทฤษฎีบท 3.3

ตารางที่ 2 และภาพที่ 2 แสดงค่าของลำดับ x_n โดยที่ $u = 0.000001, x_1 = 1$ และ $N = 100, \ n = 5000$

ตารางที่ 2 ค่าของลำดับ x_n โดยที่ $u = 0.000001, x_1 = 0.1$ และ $N = 100, \ n = 5000$

n	$y(n)$	$x(n)$
1	0.066667	0.100000
500	0.044372	0.044402
1000	0.027738	0.027747
2000	0.011202	0.011204
3000	0.004586	0.004587
4000	0.001888	0.001888
5000	0.000780	0.000780



ภาพที่ 2 การลู่เข้าของลำดับ x_n โดยที่ $u = 0.000001, x_1 = 0.1$ และ $N = 100,$ $n = 5000$

บทสรุป

ในหัวข้อ 3 เราสามารถสร้างกระบวนการทำซ้ำ (1) และพิสูจน์ทฤษฎีบท 3.1 โดยใช้การส่งแบบ K ในการหาสมาชิกร่วมของจุดตรึงของวงศ์จำกัดของการส่งแบบหดเทียมโดยแท้ และทำการยกตัวอย่างเชิงตัวเลขของทฤษฎีบท 3.1 เพื่อยืนยันความถูกต้องของทฤษฎี จากตัวอย่างดังกล่าว ในตารางที่ 1 และภาพที่ 1 จะเห็นได้ว่าลำดับ $\{x_n\}$ ลู่เข้าแบบเข้มไปยัง 0 โดยที่ $Fix(K) = \bigcap_{i=1}^{N} Fix(T_i) = \{0\}$

จากนั้นเราทำการปรับปรุงกระบวนการทำซ้ำที่ (1) และพิสูจน์ทฤษฎีบท 3.3 โดยใช้การส่งแบบ K ในการหาสมาชิกร่วมของจุดตรึงของวงศ์จำกัดของการส่งแบบหดเทียมโดยแท้ และทำการยกตัวอย่างเชิงตัวเลขของทฤษฎีบท 3.3 เพื่อยืนยันความถูกต้องของทฤษฎี จากตัวอย่างดังกล่าว ในตารางที่ 2 และภาพที่ 2 จะเห็นได้ว่าลำดับ $\{x_n\}$ ลู่เข้าแบบเข้มไปยัง 0 โดยที่ $Fix(K) = \bigcap_{i=1}^{N} Fix(T_i) = \{0\}$ เช่นเดียวกัน

เอกสารอ้างอิง

Suwannaut, S. and Kangtunyakarn, A. 2014 Strong convergence theorem for the modified generalized equilibrium problem and fixed point problem of strictly pseudo-contractive mappings. Fixed point theory and applications. 86: 1-31.

Yao, Y., Liou, Y.-C. and Giuseppc, M.. 2009. Strong convergence of two iterative algorithms for nonexpansive mappings in Hilbert spaces. Fixed point theory and applications. 15:1979-1998.

Takahashi, W. 2000. Nonlinear Functional Analysis, Yokohama Publishers, Yokohama.

Kangtunyakarn, A. and Suantai, S. 2009. A new mapping for finding common solutions of equilibrium problems and fixed point problems of finite family of nonexpansive mappings. Nonlinear Analysis. 71: 4448-4460.

Xu,H.K. 2003. An iterative approach to quadric optimization. Journal of Optimization Theory and Applications. 116: 659-678.

Opial, Z. 1967. Weak convergence of the sequence of successive approximations for non expansive mappings. Bulletin of the American Mathematical Society. 73: 591-597.