สมบัติ m บล็อกของทศนิยมซ้ำ

The m-Property of Repeating Decimals

สมเกียรติ ชัยพรเจริญศรี
สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยราชภัฏลำปาง
ตำบลชมพู อำเภอเมือง จังหวัดลำปาง 52100

บทคัดย่อ

บทความวิจัยนี้มีวัตถุประสงค์เพื่อศึกษาสมบัติ m บล็อกของทศนิยมซ้ำโดยใช้ความรู้พื้นฐานของเลขคณิตเชิงมอดุโลและทฤษฎีบทที่เผยแพร่มาแล้ว

คำสำคัญ : ทศนิยมซ้ำ คาบของทศนิยมซ้ำ สมบัติ m บล็อก เลขคณิตเชิงมอดุโล

Abstract

This article has an objective to study m-block property of repeating decimal by using basics of modular arithmetic and published works.

Keywords : repeating decimal, period of repeating decimal, m-block property, modular arithmetic

---

Email : somkiat.chai@lpru.ac.th

บทนำ

สมบัติที่น่าสนใจข้อหนึ่งของทศนิยมซ้ำ $\frac{1}{7} = 0.\overline{142857}$ คือ ทศนิยมซ้ำ $\frac{2}{7}, \frac{3}{7}, \frac{4}{7}, \frac{5}{7}$ และ $\frac{6}{7}$ เป็นการเรียงสลับเปลี่ยนแบบวัฏจักรของกลุ่มตัวเลขซ้ำ 142857 เช่น $\frac{2}{7} = 0.\overline{285714}$ และ $\frac{3}{7} = 0.\overline{428571}$ เป็นต้น และสมบัติที่น่าสนใจอีกข้อหนึ่งของ 142857 คือ เมื่อแยกเลขโดดออกเป็น 2 สตริงที่มีความยาวเท่ากันแล้วบวกจำนวนทั้งสองจะได้ 999 (142+857) แต่ถ้าแยกออกเป็น 3 สตริงจะได้ผลบวกเป็น 99 (14+28+57) พิจารณา $\frac{3}{7} = 0.\overline{428571}$ จะพบว่า 428+571=999 และ 42+85+71=198=2*(99)* ยิ่งไปกว่านั้นทศนิยมซ้ำ $\frac{t}{7}$; t=1, 2, ..., 6 จะมีสมบัติว่าเมื่อแยกเลขโดดจะได้ผลบวกเป็นพหุคูณของ 9

วัตถุประสงค์ของบทความวิจัยนี้ จะอธิบายสมบัติ m บล็อกของทศนิยมซ้ำโดยใช้ความรู้พื้นฐานของเลขคณิตเชิงมอดุโลและทฤษฎีบทที่เผยแพร่มาแล้ว

ความรู้พื้นฐาน

นิยาม 2.1 สำหรับเศษส่วนใด ๆ ความยาวของกลุ่มตัวเลขซ้ำในทศนิยมซ้ำของเศษส่วนนั้นเรียกว่า **คาบ** จะเขียนแทนด้วย ℓ ดังนั้น คาบของทุก $\frac{t}{7}$; t=1, 2, ..., 6 คือ 6

นิยาม 2.2 จะกล่าวว่าเศษส่วนมี **สมบัติผลบวก *m* บล็อกสัมพันธ์กับ 9** เรียกอย่างง่ายว่า **สมบัติ *m* บล็อก** ถ้า m หาร ℓ ลงตัวและถ้าแบ่งกลุ่มตัวเลขซ้ำออกเป็น m บล็อกที่มีความยาวเท่ากับ $k=\ell/m$ แล้วผลบวกของ m บล็อกเป็นสตริงของ 9 k ตัวหรือเป็นจำนวนเต็มที่เป็นพหุคูณของสตริงของ 9 k ตัว

ทฤษฎีบท 2.3 (Midy’s Theorem) สำหรับจำนวนเฉพาะ $p \geq 7$ และ ℓ เป็นคาบของ t/p เมื่อ $1 \leq t < p$ ถ้า m หาร ℓ ลงตัว เมื่อ $m > 1$ แล้ว สมบัติ m บล็อกเป็นจริงสำหรับ t/p

ตารางที่ 1 ตารางแสดงบางเศษส่วนที่มีสมบัติ *m* บล็อก โดยที่ตัวส่วนเป็นจำนวนเฉพาะ

เศษส่วน	ℓ	สมบัติ *m* บล็อกเป็นจริง
$1/7 = 0.\overline{142857}$	6	m = 2, 3, 6
$3/7 = 0.\overline{428571}$	6	m = 2, 3, 6
$1/13 = 0.\overline{076923}$	6	m = 2, 3, 6
$11/13 = 0.\overline{846153}$	6	m = 2, 3, 6
$1/17 = 0.\overline{0588235294117647}$	16	m = 2, 4, 8, 16
$1/19 = 0.\overline{052631578947368421}$	18	m = 2, 3, 6, 9,18
$1/31 = 0.\overline{032258064516129}$	15	m = 3, 5, 15
$11/31 = 0.\overline{354838709677419}$	15	m = 3, 5, 15
$17/73 = 0.\overline{23287671}$	8	m = 2, 4, 8

ข้อสังเกต จะเห็นว่า ℓ เป็น ค.ร.น. ของ *m* ทั้งหมด สมบัติ *m* บล็อก ยังคงเป็นจริงสำหรับบาง 1/*n*, *n* ที่ไม่ใช่จำนวนเฉพาะ (ดูตาราง 2)

ตารางที่ 2 ตารางแสดงบางเศษส่วนที่มีสมบัติ *m* บล็อก โดยที่ตัวส่วนเป็นผลคูณของจำนวนเฉพาะ

ตัวส่วน	ℓ	$\ell(p_i)$	เศษส่วน	สมบัติ *m* บล็อกเป็นจริง
77=7·11	6	6,2	$1/77=0.\overline{012987}$	m = 2, 6
91=7·13	6	6,6	$1/91=0.\overline{010989}$	m = 2, 3, 6
143=11·13	6	2,6	$19/143=0.\overline{132867}$	m = 2, 6
259=7·37	6	6,3	$19/259=0.\overline{073359}$	m = 3, 6
407=11·37	6	2,3	$19/407=0.\overline{046683}$	m = 6
1001=7·11·13	6	6,2,6	$151/1001=0.\overline{150849}$	m = 2, 6
803=11·73	8	2,8	$1/803=0.\overline{00124533}$	m = 8
451=11·41	10	2,5	$1/451=0.\overline{0022172949}$	m = 10

ข้อสังเกต ตัวอย่างจากตาราง 2, 77=7·11 คาบของ 1/7 และ 1/11 เป็น 6 และ 2 ตามลำดับ สำหรับ *m*=2, 3 และ 6 ค่าสมนัยของ *k* คือ 3, 2 และ 1 แต่มีเพียง *k* ที่เป็นพหุคูณของ 6 หรือ 2 และสมบัติ *m* บล็อกไม่เป็นจริงสำหรับ *m*=3 เมื่อ *k*=2 ดังนั้นอาจจะแสดงได้ว่า ℓ เป็น ค.ร.น. ของ $\ell(p_i)$ ทั้งหมด

สมบัติ m บล็อกสำหรับ $1/p$ เมื่อ p เป็นจำนวนเฉพาะเริ่มต้นศึกษามานานแล้ว เรียกกันว่าทฤษฎีบทของไมดี (Midy's Theorem) (Midy, 1836) ต่อมาลีวิทท์ (Leavitt) (Leavitt, 1967) ได้พิสูจน์ทฤษฎีบทไมดีใหม่ในปี ค.ศ. 2004 ไบรอัน กินส์เบิร์ก (Brian Ginsberg) (Ginsberg, 2004) ได้พิสูจน์กรณี m=3 และ $1/p$ และในปี ค.ศ. 2008 เจน อาร์เลจด์ และซารา เทคานสกี (Arledge and Tekansik, 2008) ได้พิสูจน์เกี่ยวกับสมบัติ 3 บล็อกสำหรับ $1/p$ และ $1/p^2$

ส่วนการศึกษาคาบของ p^a ดีมาเรสท์ (Desmarest, 1852) ได้อธิบายว่า "ถ้า $p < 1000$ เป็นจำนวนเฉพาะ และ $p\neq 3$, $p\neq 487$ แล้วคาบของ $1/p^2$ คือ $p(p)$ เมื่อ $\ell(p)$ เป็นคาบของ $1/p$" ต่อมาแชงส์ (Shanks, 1874) แสดงว่า "คาบของ $1/p^a$ คือ $p^{a-1}\ell(p)$ สำหรับ $p > 5$" และแสดงการกระจายทศนิยมสำหรับ $1/p$ และ $1/p^2$ (เมื่อ p=487 และ $\ell(p)$=486)

การพิสูจน์ทฤษฎีบทหลักจะใช้ความรู้พื้นฐานของเลขคณิตเชิงมอดุโลใน $\mathbb{Z}(n)=\{0, 1, 2, ..., n-1\}$ จะเขียน $\mathbb{U}(n)$ แทนเซตของสมาชิกหน่วยใน $\mathbb{Z}(n)$ เราทราบว่า $\mathbb{U}(n)$ เป็นกรุ๊ปของสมาชิกหน่วยและแต่ละสมาชิกใน $\mathbb{U}(n)$ เป็นจำนวนเฉพาะสัมพัทธ์กับ n เช่น $\mathbb{U}(15)=1, 2, 4, 7, 8, 11, 13, 14\}$

การหา t/n จะใช้ขั้นตอนวิธีการหาร โดยมักจะสมมติว่า $0 < t < n$ และเศษส่วน t/n เป็นเศษส่วนอย่างต่ำดังนั้น t เป็นจำนวนเฉพาะสัมพัทธ์กับ n และ t อยู่ใน $\mathbb{U}(n)$ จะเขียน r_0 สำหรับ t ดังนั้น r_0 เป็นเศษเหลือจากการเริ่มต้นขั้นตอนวิธี จากขั้นตอนวิธีการหารจะได้เลขโดด $d_1, d_2, d_3, ...$ และเศษเหลือ $r_1, r_2, r_3, ...$ สอดคล้องกับ

$t/n = 0.d_1d_2d_3, ...$; $d_i\in\{0, 1, 2, ..., 9\}$ และ $r_i\in \mathbb{Z}(n)$ สำหรับทุก i=1, 2, 3, ... ทั้ง d_i และ r_i ได้จาก r_{i-1} และ n กำหนดโดย $r_i=10\cdot r_{i-1}-d_in$ สังเกตว่า $r_i=10\cdot r_{i-1} \pmod n$ โดยการอุปนัยจึงได้ว่า

$r_i\equiv t\cdot 10^i \pmod n$ สำหรับทุก i

บทตั้งข้างล่างนี้เป็นข้อเท็จจริงที่ทราบกันทั่วไปเกี่ยวกับคาบของทศนิยมซ้ำ

บทตั้ง 2.4 (Hardy and Wright, 1960) สมมติว่า 2 และ 5 ไม่เป็นตัวหารของ n ให้ ℓ เป็นคาบของ $1/n$ และ t อยู่ใน (n)

(ก) คาบ ℓ ของ $1/n$ ยังคงเป็นคาบของ t/n สำหรับทุก $t\in\mathbb{U}(n)$

(ข) กลุ่มตัวเลขซ้ำของการกระจายทศนิยมสำหรับ t/n เป็นคาบ นั่นคือจะเริ่มด้วย d_1

(ค) คาบ ℓ ของ t/n เป็นจำนวนเต็มบวก ℓ น้อยที่สุด โดยที่ $10^\ell\equiv 1 \pmod n$ ดังนั้น $10^\ell\equiv 1 \pmod n$ ก็ต่อเมื่อ k เป็นพหุคูณของ ℓ

กำหนด $t\in\mathbb{U}(n)$, 2 และ 5 ไม่เป็นตัวประกอบของ n และ $\ell=mk$ เมื่อ $m > 1$ กลุ่มตัวเลขซ้ำของการกระจายทศนิยมสำหรับ t/nคือ $d_1d_2\cdots d_\ell$ แบ่งเป็น m บล็อกของจำนวนเต็มเรียงกัน แต่ละบล็อกมีความยาวเป็น k: $A_1, A_2, ..., A_m$ ดังนั้น $A_1=d_1d_2\cdots d_k$, $A_2=d_{k+1}d_{k+2}\cdots d_{2k}$ เป็นต้น และ $A_m=d_{(m-1)k+1}d_{(m-1)k+2}\cdots d_{mk}$

บทตั้ง 2.5 (Shrader-Frechette, 1978) สมบัติ *m* บล็อกเป็นจริง สำหรับแต่ละ *t/n* ก็ต่อเมื่อ

$$1+10^{k}+10^{2k}+\ \ +10^{(m-1)k}\equiv 0 \pmod{n}$$

บทตั้ง 2.6 (บทตั้งของมัวร์, 10**)** ถ้า p ≥ 3 เป็นจำนวนเฉพาะ และ *M*, *n* และ *a* เป็นจำนวนเต็มบวก แล้ว

$M\equiv 1 \pmod{p^{a}}$ ก็ต่อเมื่อ $M^{p^{n}}\equiv 1 \pmod{p^{a+n}}$

ทฤษฎีบทหลัก

บทตั้ง 3.1 ข้อความข้างล่างนี้สมมูลกัน และเมื่อเป็นจริงจะเป็นจริงสำหรับจำนวนเต็ม *K* ซึ่งสอดคล้องกับ $K\leq m-1$

(ก) $A_1+A_2+\cdots+A_m= K(10^{k}-1)$
(สังเกตว่าแต่ละผลบวกที่เกิดขึ้นมี *k* หลัก และ $10^{k}-1$ เป็นสตริงของ 9 *k* ตัวนี้คือสมบัติ *m* บล็อกสำหรับ *t/n*)

(ข) $A_1A_2\cdots A_m+A_2A_3\cdots A_mA_1+\cdots+A_mA_1\cdots A_{m-1}= K(10^{\ell}-1)$ (สังเกตว่าแต่ละผลบวกที่เกิดขึ้นมี ℓ หลัก และ $10^{\ell}-1$ เป็นสตริงของ 9 ℓ ตัว)

(ค) $0.\overline{A_1A_2\cdots A_m}+0.\overline{A_2A_3\cdots A_mA_1}+\cdots+0.\overline{A_mA_1\cdots A_{m-1}}= K$ (สังเกตว่าแต่ละทศนิยมซ้ำคือเศษส่วน *t/n*)

การพิสูจน์ ให้ *A*, *B* และ *C* เป็นผลบวกในข้อ ก, ข และ ค ตามลำดับ

จะแสดงว่า (ก) ⇔ (ข) เนื่องจาก

$$A_1+A_2+\cdots+A_m=A_m+A_{m-1}\cdot 10^{k}+A_{m-2}\cdot 10^{2k}+\cdots+A_1\cdot 10^{(m-1)k}$$

ด้วยผลบวกเท่ากันสำหรับ $A_2A_3\cdots A_mA_1$ จะเห็นว่า

$$B = A+A\cdot 10^{k}+A\cdot 10^{2k}+\cdots+A\cdot 10^{(m-1)k}$$

$$= A(1+10^{k}+10^{2k}+\cdots+10^{(m-1)k}) = A\cdot\frac{10^{km}-1}{10^{k}-1} = A\cdot\frac{10^{\ell}-1}{10^{k}-1}$$

จึงได้ว่า $B = K(10^{\ell}-1)$ ก็ต่อเมื่อ $A = K(10^{k}-1)$

จะแสดงว่า (ข) ⇔ (ค) เรามีว่า

$$0.\overline{A_1A_2\cdots A_m} = \frac{A_1A_2\cdots A_m}{10^{\ell}-1}$$

ผลบวกของทุกการเรียงตัวเศษใหม่เป็นวัฏจักร จะได้ผลบวกเป็น

$$C = \frac{A_1A_2\cdots A_m+A_2A_3\cdots A_mA_1+\cdots+A_mA_1\cdots A_{m-1}}{10^{\ell}-1} = \frac{B}{10^{\ell}-1}$$

จึงได้ว่า $B = K(10^{\ell}-1)$ ก็ต่อเมื่อ $C = K$ □

ทฤษฎีบท 3.2 ให้ $n=p_1^{a_1}\cdots p_r^{a_r}$ เมื่อ $p_i \geq 7$ เป็นจำนวนเฉพาะ แตกต่างกัน ให้ ℓ เป็นคาบของเศษส่วนอย่างต่ำ t/n เมื่อ $1 \leq t < n$ สำหรับแต่ละ p_i เราเขียน $\ell(p_i)$ แทนคาบของ $1/p_i$ ถ้า $\ell=mk$ เมื่อ $m > 1$ และ k เป็นจำนวนเต็ม และไม่มีคาบ $\ell(p_i)$ หาร k ลงตัว แล้ว t/n มีสมบัติ m บล็อก

การพิสูจน์ โดยบทตั้ง 2.5 เป็นการเพียงพอที่จะแสดงว่า

$$1+x+x^2+\cdots+x^{m-1} \equiv 0 \pmod{n}$$

เมื่อ $x=10^k$ สังเกตว่า $x^m \equiv 10^\ell \equiv 1 \pmod{n}$ ดังนั้น $x^m-1 \equiv 0 \pmod{n}$ กำหนด p_i เนื่องจาก n หาร x^m-1 ลงตัว ดังนั้น

$$p_i^{a_i} \text{ หาร } x^m-1 = (x-1)(1+x+x^2+\cdots+x^{m-1}) \text{ ลงตัว}$$

โดยสมมติฐานที่ว่า k ไม่เป็นพหุคูณของ $\ell(p_i)$ โดยบทตั้ง 2.4(ค) จะได้ว่า $x = 10^k \not\equiv 1 \pmod{p_i}$ อีกนัยหนึ่ง p_i หาร $x-1$ ไม่ลงตัว จึงได้ว่า

$$p_i^{a_i} \text{ หาร } 1+x+x^2+\cdots+x^{m-1} \text{ ลงตัว}$$

เป็นจริงสำหรับทุก i ดังนั้น n หาร $1+x+x^2+\cdots+x^{m-1}$ ลงตัว นั่นคือ

$$1+x+x^2+\cdots+x^{m-1} \equiv 0 \pmod{n} \qquad \square$$

ตัวอย่างข้างล่างนี้แสดงว่าบทกลับของทฤษฎีบท 2.2 ไม่เป็นจริง กล่าวคือ สมบัติ m บล็อกยังคงเป็นจริง แม้ว่าบางคาบย่อย $\ell(p_i)$ หาร k ลงตัว

ตัวอย่าง 3.3 สำหรับ $n=253=11\cdot 23$ และ $\ell=22=mk$ เมื่อ $m=11$ และ $k=2$ จะได้ว่า

$$\frac{1}{253} = 0.\overline{0039525691699604743083}$$

ผลบวกของ 11 บล็อกคือ $594=6\cdot 99$ และ $k=2$ เป็นพหุคูณของ $\ell(11)=2$

บทตั้ง 3.4 สำหรับจำนวนเฉพาะ p ที่ไม่เท่ากับ 2 และ 5 และสำหรับ $a \geq 1$ จะได้ว่า $\ell(p^a) = p^s\ell(p)$ สำหรับบาง $s \leq a-1$ ยิ่งไปกว่านั้น ถ้า w เป็นกำลังสูงสุดของ p โดยที่ $\ell(p^w) = \ell(p)$ แล้ว $\ell(p^a) = \ell(p)p^{a-w}$ สำหรับ $a > w$

การพิสูจน์ เนื่องจาก $10^{\ell(p)} \equiv 1 \pmod{p}$ โดยบทตั้งของมัวร์จะได้ว่า $10^{\ell(p)}10^{\ell(p)p^{a-1}} \equiv 1 \pmod{p^a}$ โดยบทตั้ง 2.4(ค) จะได้ว่า $\ell(p^a)$ หาร $\ell(p)p^{a-1}$ ลงตัว เนื่องจาก $10^{\ell(p^a)} \equiv 1 \pmod{p^a}$ ดังนั้น $10^{\ell(p^a)} \equiv 1 \pmod{p}$ นั่นคือ $\ell(p^a)$ เป็นพหุคูณของ $\ell(p)$ (โดยบทตั้ง 2.4(ค) เนื่องจาก $\ell(p)$ เป็นจำนวนเฉพาะสัมพัทธ์กับ p และน้อยกว่า p ดังนั้น $\ell(p^a)=\ell(p)p^s$ สำหรับบาง $s \leq a-1$ สมมติ $\ell(p^w)=\ell(p)$ และ $\ell(p^{w+1}) > \ell(p)$ จะแสดงว่า $s=a-w$ เมื่อ $a > w$ เนื่องจาก $10^{\ell(p)} \equiv 1 \pmod{p^w}$ โดยบทตั้งของมัวร์ ($a=w$) จะได้ว่า $10^{\ell(p)p^n} \equiv 1 \pmod{p^{n+w}}$ โดยที่ $n=a-w$ จะเห็นว่า $10^{\ell(p)p^{a-w}} \equiv 1 \pmod{p^a}$ ดังนั้น $\ell(p)p^{a-w}$ ต้องเป็นพหุคูณของ $\ell(p)p^s$ และดังนั้น $s \leq a-w$ ต่อไปสมมติว่า $s < a-w$ สำหรับบาง $a > w$ จะได้ว่า $10^{\ell(p)p^s} \equiv 1 \pmod{p^s}$ โดยบทตั้งของมัวร์จะได้ว่า $10^{\ell(p)} \equiv 1$ (mod

p^{a-s}) เนื่องจาก $a-s \geq w+1$ จึงได้ว่า $10^{\ell(p)} \equiv 1 \pmod{p^{w+1}}$ ดังนั้น $\ell(p^{w+1}) \leq \ell(p)$ ซึ่งขัดแย้งกับสมมติฐานของ w $\square$

ทฤษฎีบท 3.5 สำหรับกำลังของจำนวนเฉพาะ p^a เมื่อ $p \geq 7$ และจำนวนเต็ม t เมื่อ $1 \leq t < p^a$ และ t เป็นจำนวนเฉพาะสัมพัทธ์กับ p ให้ ℓ เป็นคาบของ t/p^a และสมมติ $\ell=mk$ เมื่อ $m > 1$ และ k เป็นจำนวนเต็ม ข้อความต่อไปนี้สมมูลกัน

(ก) สมบัติ m บล็อกเป็นจริงสำหรับ t/p^a

(ข) mไม่เป็นกำลังของ p

(ค) คาบ $\ell(p)$ ของ $1/p$ หาร k ไม่ลงตัว

การพิสูจน์

(1) โดยบทตั้ง 3.4 จะได้ว่า (ข) $\Leftrightarrow$ (ค) เพราะว่า $\ell = p^s\ell(p)$ สำหรับบาง $s \geq 0$ หรือ $mk = p^s\ell(p)$ ดังนั้น m เป็นกำลังของ p ก็ต่อเมื่อ k เป็นพหุคูณของ $\ell(p)$

(2) การพิสูจน์ (ค) $\Rightarrow$ (ก) เป็นกรณีหนึ่งของทฤษฎีบท 3.2

(3) สมมติ (ก) เป็นจริงแต่ (ข) และ (ค) เป็นเท็จ โดยบทตั้ง 2.5 ได้ว่า

$$1+x+x^2+\cdots+x^{m-1} \equiv 0 \pmod{n}$$

เมื่อ $x=10^k$ เนื่องจาก (ค) เป็นเท็จ ดังนั้น k เป็นพหุคูณของ $\ell(p)$ โดยบทตั้ง 1.3(ค) ดังนั้น p หาร x-1 ลงตัว เนื่องจาก $x^m-1 = (x-1)(1+x+x^2+\cdots+x^{m-1})$ และ p^a หารผลบวกลงตัว ดังนั้น p^{a+1} หาร x^m-1 ลงตัว และจาก (ข) เป็นเท็จดังนั้น $m=p^u$ สำหรับบาง $u \geq 1$ นั่นคือ

$$x^{p^u} \equiv 1 \pmod{p^{a+1}}$$

โดบบทตั้งของมัวร์จะได้ว่า

$$x^{p^{u-1}} \equiv 1 \pmod{p^a} \quad \text{หรือ} \quad 10^{kp^{u-1}} \equiv 1 \pmod{p^a}$$

เนื่องจาก $kp^{u-1} < kp^u = km = \ell$ จึงเกิดข้อขัดแย้งกับความจริงที่ว่า ℓ เป็นกำลังน้อยที่สุดของ 10 ที่สมมูลกับ $1 \pmod{p^a}$ เราจึงสรุปได้ว่า (ก) $\Rightarrow$[(ข) และ (ค)] $\square$

ทฤษฎีบท 3.5 ยืนยันว่า สมบัติ 2 บล็อก และ 3 บล็อกเป็นจริงเสมอ สำหรับ $1/p^a$, $p \geq 7$

ตาราง 3 แสดงตัวอย่างเมื่อตัวส่วนเป็นกำลังของจำนวนเฉพาะและสมบัติ m บล็อกไม่เป็นจริงสังเกตว่า ในแต่ละกรณีทั้งเงื่อนไข (ข) และ (ค) ในทฤษฎีบท 3.5 ไม่เป็นจริง เพราะว่า m เป็นกำลังของ p และ $\ell(p)$ หาร k ลงตัว

ตารางที่ 3 ตารางแสดงบางเศษส่วน $1/p^a$ ที่ทั้งเงื่อนไข (ข) และ (ค) ในทฤษฎีบท 3.5 ไม่เป็นจริง

ตัวส่วน	ℓ	เศษส่วน	m	k	$\ell(p)$	ผลบวกของ m บล็อก
$49=7^2$	42	$1/49=0.\overline{020408163265307\cdots}$	7	6	6	3, 142, 854
$121=11^2$	22	$1/121=0.\overline{00826446280\cdots}$	11	2	2	504
$169=7^2$	78	$1/169=0.\overline{005917\cdots}$	13	6	6	6, 076, 917
$343=7^3$	294	$1/343=0.\overline{002915\cdots}$	7	42	6	$\cdots$77, 548
$343=7^3$	294	$1/343=0.\overline{002915\cdots}$	49	6	6	24, 442, 833

ตารางที่ 4 ตารางแสดงบางเศษส่วน $1/p^a$ ที่มีสมบัติ m บล็อก

ตัวส่วน	ℓ	เศษส่วน	สมบัติ m บล็อกเป็นจริง
$49=7^2$	42	$1/49=0.\overline{020408163265307\cdots}$	m = 2, 3, 6, 14, 21, 42
$121=11^2$	22	$1/121=0.\overline{00826446280\cdots}$	m = 2, 22
$169=7^2$	78	$1/169=0.\overline{005917\cdots}$	m = 2, 3, 6, 26, 39, 78
$343=7^3$	294	$1/343=0.\overline{002915\cdots}$	m = 2, 3, 6, 14, 21, 42, 98, 147, 294

บทสรุป

พิจารณาทศนิยมซ้ำของเศษส่วนอย่างต่ำ t/n ระหว่าง 0 ถึง 1 เมื่อไม่มีจำนวนเฉพาะ 2, 3 หรือ 5 เป็นตัวประกอบของ n เศษส่วนนั้นจะสอดคล้องกับสมบัติ m บล็อกถ้า m หารคาบ ℓ ลงตัว และเมื่อแบ่งกลุ่มตัวเลขซ้ำเป็น m บล็อกที่มีความยาวเท่ากัน ผลบวกของ m บล็อกเป็นสตริงของ 9 หรือเป็นจำนวนเต็มที่เป็นพหุคูณของ 9 เงื่อนไขเพียงพอที่ทำให้ t/n มีสมบัติ m บล็อก : สำหรับ n เท่ากับกำลังของจำนวนเฉพาะ p^a $(p\geq 7)$ ดังแสดงในทฤษฎีบท 3.4 ยิ่งไปกว่านั้น t/p^a มีสมบัติ m บล็อก ก็ต่อเมื่อ m ไม่เป็นกำลังของ p ดังแสดงในทฤษฎีบท 3.5

เอกสารอ้างอิง

Arledge, J. and Tekansik, S. 2008. A new property of repeating decimals. *College Math. J.* 39 : 107-111.

Desmarest, E. Théorie des nombres, L. Hachette, Paris, 1852. 6. L. E, Dickson, History of the Theory of Numbers, vol. 1: 1919.

Ginsberg, B. D. 2004. Midy's (nearly) secret theoreman extension after 165 years, College Math. J. 35 : 26–30.

Glaisher, J. W. L. 1878. On circulating decimals, Proc. Cambridge Phil. Soc. 3 : 185–206.

Hardy, G. H. and Wright, E. M. 1960. An Introduction to the Theory of Numbers, 4^{th} ed., Oxford University Press, London.

Leavitt, W. G. 1967. A theorem on repeating decimals, Amer. Math. Monthly 74 : 669-673.

Midy, E. 1836. De quelquesproprietés des nombreset des fractions décimalespériodiques, Nantes, 21 p.

Shanks, E. 1874. Messenger Math. 3 : 52–55.

Shrader-Frechette, M. 1978. Complementary rational numbers, Math. Mag. 51 : 90-98.